

Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)

Final Event 1 (Individual)

香港數學競賽 (2011 / 2012)

決賽項目 1 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 A 是多項式 $x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x + 2$ 的所有根的平方之和，求 A 的值。

If A is the sum of the squares of the roots of $x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x + 2$, find the value of A .

$A =$

2. 設 x, y, z, w 為正 A 邊形的四個相連端點。若線段 xy 的長度為 2 及四邊形 $xyzw$ 的面積是 $a + \sqrt{b}$ ，求 $B = 2^a 3^b$ 的值。

Let x, y, z, w be four consecutive vertices of a regular A -gon. If the length of the line segment xy is 2 and the area of the quadrilateral $xyzw$ is $a + \sqrt{b}$, find the value of $B = 2^a 3^b$.

$B =$

3. 若 C 是 B 的所有因子之和，其中 B 的因子包括 1 和 B ，求 C 的值。

If C is the sum of all factors of B , including 1 and B itself, find the value of C .

$C =$

4. 若 $C! = 10^D k$ ，其中 D 及 k 皆為整數且 k 不是 10 的倍數，求 D 的值。

If $C! = 10^D k$, where D and k are integers such that k is not divisible by 10, find the value of D .

$D =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)

Final Event 2 (Individual)

香港數學競賽 (2011 / 2012)

決賽項目 2 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 P 是方程 $x^2 + 9x + 13 = 2\sqrt{x^2 + 9x + 21}$ 的所有實根之乘積，求 P 的值。

If the product of the real roots of the equation $x^2 + 9x + 13 = 2\sqrt{x^2 + 9x + 21}$ is P , find the value of P .

$P =$

2. 若 $f(x) = \frac{25^x}{25^x + P}$ 及 $Q(x) = f\left(\frac{1}{25}\right) + f\left(\frac{2}{25}\right) + \cdots + f\left(\frac{24}{25}\right)$ ，求 Q 的值。

If $f(x) = \frac{25^x}{25^x + P}$ and $Q(x) = f\left(\frac{1}{25}\right) + f\left(\frac{2}{25}\right) + \cdots + f\left(\frac{24}{25}\right)$, find the value of Q .

$Q =$

3. 若 $X = \sqrt{(100)(102)(103)(105) + (Q-3)}$ 是整數及 R 是 X 的個位數，求 R 的值。

If $X = \sqrt{(100)(102)(103)(105) + (Q-3)}$ is an integer and R is the units digit of X , find the value of R .

$R =$

4. 若 S 是方程 $\sqrt{2012}x^{\log_{2012} x} = x^R$ 的所有正根之乘積的最後 3 位數字（個位數，十位數，百位數）之和，求 S 的值。

If S is the sum of the last 3 digits (hundreds, tens, units) of the product of the positive roots of $\sqrt{2012}x^{\log_{2012} x} = x^R$, find the value of S .

$S =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)

Final Event 3 (Individual)

香港數學競賽 (2011 / 2012)

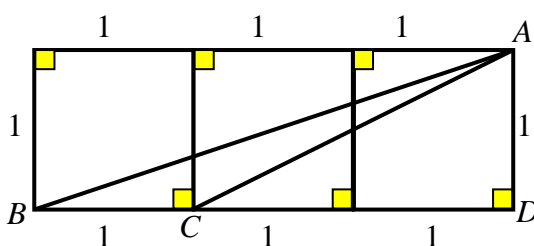
決賽項目 3 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 在圖一中，長方形由三個邊長為 1 之正方形組成。若 $\alpha^\circ = \angle ABD + \angle ACD$ ，求 α 的值。

In Figure 1, a rectangle is sub-divided into 3 identical squares of side length 1. If $\alpha^\circ = \angle ABD + \angle ACD$, find the value of α .



圖一

Figure 1

$\alpha =$

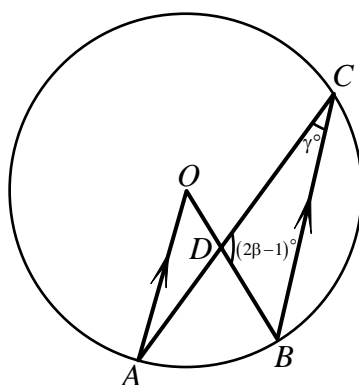
2. 設 ABC 為一三角形。若 $\sin A = \frac{36}{\alpha}$ ， $\sin B = \frac{12}{13}$ 及 $\sin C = \frac{\beta}{y}$ ，求 β 的值，其中 β 及 y 是最簡化之代表形式。

Let ABC be a triangle. If $\sin A = \frac{36}{\alpha}$, $\sin B = \frac{12}{13}$ and $\sin C = \frac{\beta}{y}$, find the value of β , where β and y are in the lowest terms.

$\beta =$

3. 在圖二中，有一個圓心在 O 的圓，其圓周上有點 A 、 B 及 C ，有四條線段： OA 、 OB 、 AC 與 BC ，且 OA 與 BC 平行。若 D 是 OB 及 AC 之交點且 $\angle BDC = (2\beta - 1)^\circ$ 及 $\angle ACB = \gamma^\circ$ ，求 γ 的值。

In Figure 2, a circle at centre O has three points on its circumference, A , B and C . There are line segments OA , OB , AC and BC , where OA is parallel to BC . If D is the intersection of OB and AC with $\angle BDC = (2\beta - 1)^\circ$ and $\angle ACB = \gamma^\circ$, find the value of γ .



圖二

Figure 2

$\gamma =$

4. 在 $(ax+b)^{2012}$ 的展開式中， a 與 b 為互質之正整數，若 x^γ 與 $x^{\gamma+1}$ 的系數相同，求 $\delta = a+b$ 的值。

In the expansion of $(ax+b)^{2012}$, where a and b are relatively prime positive integers, if the coefficients of x^γ and $x^{\gamma+1}$ are equal, find the value of $\delta = a+b$.

$\delta =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)

Final Event 4 (Individual)

香港數學競賽 (2011 / 2012)

決賽項目 4 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 A 為一正整數且 $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(A+1)(A+3)} = \frac{12}{25}$ ，求 A 的值。

If A be a positive integer such that $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(A+1)(A+3)} = \frac{12}{25}$, find the value of A .

$A =$

2. 若 x 與 y 為正整數且 $x > y > 1$ 及 $xy = x + y + A$ 。設 $B = \frac{x}{y}$ ，求 B 的值。

If x and y be positive integers such that $x > y > 1$ and $xy = x + y + A$. Let $B = \frac{x}{y}$, find the value of B .

$B =$

3. 設 f 為一函數並滿足以下條件：

- (i) 對所有正整數 n ， $f(n)$ 必為整數；
- (ii) $f(2) = 2$ ；
- (iii) 對所有正整數 m 及 n ， $f(mn) = f(m)f(n)$ 及
- (iv) 當 $m > n$ ， $f(m) > f(n)$ 。

若 $C = f(B)$ ，求 C 的值。

Let f be a function satisfying the following conditions:

- (i) $f(n)$ is an integer for every positive integer n ;
- (ii) $f(2) = 2$;
- (iii) $f(mn) = f(m)f(n)$ for all positive integers m and n and
- (iv) $f(m) > f(n)$ if $m > n$.

If $C = f(B)$, find the value of C .

$C =$

4. 設 D 為 2401×7^C (以十進制表示) 的最後三位數字之和。求 D 的值。

Let D be the sum of the last three digits of 2401×7^C (in the decimal system). Find the value of D .

$D =$
